



La discrimination par les prix : une stratégie de protection contre le piratage informatique

marc ROBERT

LAMETA, Université Montpellier I, Faculté des Sciences Economiques,
Avenue de la Mer, Site Richter, C.S. 79606, 34960 Montpellier cedex 2.
Tél : 04-67-15-83-04 Mail : robertm@lamea.univ-montpl.fr

Résumé

L'objectif officiel affiché par le premier éditeur de logiciel, Microsoft, est de révolutionner la sécurité dans tout le domaine informatique grâce à son nouveau logiciel Palladium, renommée dernièrement NSGB pour Next-Generation Secure Computing Base. Si l'ordinateur personnel d'aujourd'hui est très vulnérable, le PC de demain pourrait bien être inviolable. A la fin de l'année 1999, Microsoft et trois des plus grands constructeurs de ce type de machine, IBM, Compaq et Hewlett-Packard, accompagnés par les fabricants de microprocesseurs, Intel et AMD, ont en effet décidé de s'attaquer au problème de la sécurité sur les micro-ordinateurs. Ils ont fondé l'alliance pour une plate-forme informatique de confiance, la « Trusted Computing Platform Alliance » (TCPA).

L'idée maîtresse du consortium TCPA est de doter chaque PC d'une puce de sécurité, placée sur la carte mère, et du logiciel palladium que Microsoft introduira dans les futures versions de Windows, en particulier Longhorn prévu pour 2004. L'objectif avoué est de lutter contre le piratage informatique, et de limiter la copie des logiciels et des fichiers protégés par copyright comme la musique ou les films.

Dans les années 80-90, les éditeurs baissaient le niveau de protection contre le piratage de leurs logiciels. Les travaux de Shy et Thisse (1999) expliquaient ce comportement par le fait, qu'à cette époque, les politiques anti-piratage n'étaient pas rentables pour les éditeurs. L'objectif de notre travail est de comprendre le récent regain d'intérêt des éditeurs pour la sécurité de leurs logiciels.

Pourquoi ce changement de politique de la part des éditeurs depuis la fin du millénaire, qu'est ce qui leur a permis de passer d'une politique laxiste à celle de tolérance zéro ?

Afin d'y répondre, nous élargissons l'analyse de Shy et Thisse (1999) à une industrie informatique où le réseau Internet est pris en compte. Il a pour principal avantage de permettre une commercialisation discriminatoire des logiciels, à grande échelle et à faibles coûts, qui n'était pas présente dans les travaux de Shy et Thisse.

Notre principal résultat est que la discrimination rend à nouveau rentable la protection des logiciels. Cet article fait partie d'une suite de trois articles qui démontrent que la discrimination ne doit pas être a priori considérée comme une politique de prix agressive envers les consommateurs ou envers les firmes concurrentes. Cette politique n'est pas mauvaise en soit, c'est l'utilisation que les entreprises en font qui peut être condamnée. Elle n'est simplement qu'un outil stratégique utile pour le management des firmes.

Mots-clés : Industrie informatique, Internet, prix discriminatoires, oligopole.



La discrimination par les prix : une stratégie de protection contre le piratage informatique

RESUME

Dans cet article, nous analysons le regain d'intérêt des éditeurs de logiciels pour les politiques anti-piratage. En effet, au milieu des années 80-90, nous avons assisté à une baisse des protections des logiciels, phénomène expliqué par Shy et Thisse 1999. Mais l'apparition d'Internet et son développement rapide depuis 1998 vont changer la situation. Les éditeurs voient en ce média un nouveau moyen de diffusion et de contrôle des logiciels, ainsi qu'une opportunité pour mettre en place une commercialisation discriminatoire à grande échelle. L'utilisation de la discrimination par les prix va rendre à nouveau rentable la protection des logiciels. Elle n'est pas obligatoirement une stratégie agressive et peut être utilisée à des fins défensives.

1. INTRODUCTION

Bill Gates, le président de la société Microsoft, cherche à faire de l'informatique un système « aussi disponible, fiable et sûr que les services d'eau, d'électricité, ou de téléphone ». L'objectif officiel affiché par le premier des éditeurs de logiciels est de révolutionner la sécurité dans tout le domaine informatique grâce à son nouveau logiciel Palladium, renommée dernièrement NSGB pour Next-Generation Secure Computing Base.

Si l'ordinateur personnel d'aujourd'hui est très vulnérable, le PC de demain pourrait bien être inviolable. A la fin de l'année 1999, Microsoft et trois des plus grands constructeurs de ce type de machine, IBM, Compaq et Hewlett-Packard, accompagnés par les fabricants de microprocesseurs, Intel et AMD, ont en effet décidé de s'attaquer au problème de la sécurité sur les micro-ordinateurs. Ils ont fondé l'alliance pour une plate-forme informatique de confiance, la « Trusted Computing Platform Alliance » (TCPA). Ce groupement, est aujourd'hui un consortium réunissant plus de 200 industriels, éditeurs de logiciels, fabricants de composants informatiques et assembleurs d'ordinateurs.

L'idée maîtresse du consortium TCPA est de doter chaque PC d'une puce de sécurité, placée sur la carte mère, et du logiciel palladium que Microsoft introduira dans les futures versions de Windows, en particulier Longhorn prévu pour 2004.

Le principe est simple : au démarrage de l'ordinateur, une puce de sécurité vérifie si l'ordinateur est bien une machine digne de confiance. De son côté, muni du feu vert de la



puce, le logiciel Palladium se charge des autorisations d'utilisation des logiciels complémentaires. L'objectif avoué est de lutter contre le piratage informatique, et de limiter la copie des logiciels et des fichiers protégés par copyright comme la musique ou les films. Après le Digital Millennium Copyright Act ([DMCA](#)), la législation sur les droits d'auteurs votée aux Etats-Unis en 1998, l'architecture TCPA/Palladium va offrir une base technique idéale pour réprimer la contrefaçon.

Dans les années 80-90, les éditeurs baissaient le niveau de protection contre le piratage de leurs logiciels. Les travaux de Shy et Thisse (1999) expliquaient ce comportement par le fait, qu'à cette époque, les politiques anti-piratage n'étaient pas rentables pour les éditeurs. L'objectif de notre travail est de comprendre le récent regain d'intérêt des éditeurs pour la protection de leurs logiciels.

Pourquoi ce changement de politique de la part des éditeurs depuis la fin du millénaire, qu'est ce qui leur a permis de passer d'une politique laxiste à celle de tolérance zéro ?

Afin d'y répondre, nous élargissons l'analyse de Shy et Thisse (1999) à une industrie informatique où le réseau Internet est pris en compte. A la fin de l'année 1999 et début 2000, le nombre d'utilisateurs d'Internet s'est accru très fortement, ce média devient alors un nouveau canal de distribution pour les éditeurs. Il a pour principal avantage de permettre une commercialisation discriminatoire des logiciels, à grande échelle et à faibles coûts, qui n'était pas présente dans les travaux de Shy et Thisse. Les éditeurs n'avaient pas la possibilité de choisir entre la politique de prix discriminatoires et celle à prix uniformes.

Notre principal résultat est que la pratique commerciale discriminatoire rend à nouveau rentable la protection des logiciels, elle est la stratégie optimale pour les éditeurs. Ainsi, le piratage s'est développé grâce à l'utilisation d'Internet mais il va peut être disparaître à cause de sa trop grande utilisation.

La suite de notre travail est organisée de la manière suivante :

La section 2 décrit le modèle de base. La section 3 présente le comportement des consommateurs, pour toutes les politiques de prix possibles, et quelle que soit la stratégie de protection adoptée par les éditeurs. La section 4 détermine les prix d'équilibre des logiciels pour une industrie non protégée, la section suivante (5) pour une industrie totalement protégée, et la section 6 pour une industrie partiellement protégée. Dans la section 7, nous recherchons le type de politique de prix et le degré de protection contre le piratage choisi par les éditeurs. Nous analysons, ensuite l'impact de ces choix sur le bien être social. Dans la section 8, nous concluons notre analyse.



2. LE MODELE

Nous considérons l'industrie oligopolistique du logiciel, similaire à celle décrite par Shy et Thisse, où deux éditeurs A et B se concurrencent en prix. Ces éditeurs produisent et vendent leur logiciel localisés à chacune des extrémités du marché, marché qui est représenté par le segment $[0, 1]$. La commercialisation est accompagnée d'un service après vente personnalisé, un suivi client avec assistance technique. Ces firmes peuvent choisir librement d'utiliser une commercialisation discriminatoire ou non, pour la vente de leur produit. La tarification uniforme à "prix départ usine unique" est notée FOB (Free On Bord) et la tarification discriminatoire à "prix livraison inclus" est notée D. Si la commercialisation FOB est adoptée, tous les consommateurs paieront le même prix pour le même bien. Ils auront à leur charge le coût de déplacement jusqu'au magasin de l'éditeur. Par contre, si la commercialisation discriminatoire est choisie, les consommateurs paieront tous un prix livraison inclus différent. Les firmes profiteront de la possibilité de repérer chaque consommateur par sa localisation, pour discriminer entre eux. Chaque consommateur est caractérisé par sa position sur le marché, qui peut être aussi interprétée comme la variété du logiciel qui lui paraît idéale.

Actuellement, les utilisateurs de logiciels peuvent être scindés en deux catégories. La première est représentée par les professionnels, qui sont prêts à payer cher pour l'utilisation d'applications informatiques. Ils ont besoin d'un suivi technique, d'une assistance en cas de problème de fonctionnement. De plus, ils sont facilement contrôlables et condamnables en cas d'utilisation de logiciels piratés. A contrario, le deuxième groupe est constitué d'utilisateurs privés, souvent des étudiants ou passionnés d'informatique, qui ont une propension nette à payer faible.

Pour prendre en compte cette réalité, nous considérerons que la clientèle potentielle des éditeurs A et B sera composée des professionnels et des consommateurs privés. Cette hypothèse a été également faite par Slive et Bernhardt (1998) et Shy et Thisse (1999). Les professionnels valorisent les services et le support technique s , offert par l'éditeur, à hauteur de σ , alors que les consommateurs privés ne tirent aucune satisfaction du suivi client. L'ensemble de la clientèle, professionnels et privés, est répartie uniformément sur le marché, représenté par le segment $[0, 1]$. La population totale dans cette économie est au nombre de 2. Les différents groupes ont la même taille. Cette hypothèse, également utilisée par Shy et Thisse. Les clients du premier groupe sont indicés par x et ceux du deuxième groupe par y . Chaque catégorie de client a le choix entre acheter un logiciel ou le pirater. Le nombre total

d'utilisateurs (légaux et illégaux), du logiciel A est noté n_A et celui du logiciel B est noté n_B . Aux yeux des clients, la valeur de chaque application dépend du nombre total d'utilisateurs existants (légaux ou illégaux). Plus les utilisateurs d'un logiciel seront nombreux, moins ces utilisateurs seront confrontés à des problèmes d'échange et de lecture de fichiers, dus à une incompatibilité créée par les différents formats des logiciels. Les utilisateurs profiteront donc d'externalités positives de réseau représentées par m_i , $i = A, B$, ces utilisateurs accordent une importance μ au fait d'être un nombre n_i élevé.

Pour étudier les décisions des différents acteurs de cette industrie, utilisateurs et éditeurs, nous allons utiliser un jeu en plusieurs étapes. Le déroulement de ce jeu sera le suivant :

Dans la première étape, les éditeurs de logiciels décident de l'opportunité de la mise en place ou non d'une politique de protection anti-piratage, notée respectivement P et \bar{P} .

Ensuite à la 2^{ème} étape, en fonction du choix précédent ils décideront quelle politique de prix ils vont adopter pour la commercialisation de leur logiciel : la politique discriminatoire (D) ou la politique de prix uniformes (FOB).

Dans une 3^{ème} étape, les éditeurs fixeront les prix de vente demandés aux consommateurs.

Pour finir, à la 4^{ème} étape, les consommateurs potentiels font leur choix en fonction des prix imposés. Soit ils restent dans la légalité, en achetant l'un des deux logiciels disponibles ou en refusant de le pirater, soit ils décident de passer dans l'illégalité et de pirater l'un d'entre eux.

La notion d'équilibre sera l'équilibre parfait en sous-jeux. Par conséquent, nous compensons par analyser le choix des consommateurs

3. LE CHOIX DES CONSOMMATEURS

Chaque consommateur achètera un logiciel, s'il trouve l'application informatique i qui lui procure une utilité indirecte U_i positive. Il optera pour la version qui maximise sa satisfaction. La politique de prix ainsi que le degré de protection anti-piratage, choisi par les éditeurs, influencent le comportement des acheteurs potentiels. Les professionnels et les consommateurs privés peuvent être amenés à faire face à plusieurs situations, ce qui modifiera d'autant leur décision d'achat.

En effet, les éditeurs A et B ont la possibilité de choisir simultanément le même degré de protection. C'est à dire, soit opter ensemble pour une protection totale, notée (P, P) , où le piratage n'est pas possible, ou bien opter pour une politique plus laxiste, laissant possible l'utilisation illégale notée (\bar{P}, \bar{P}) . A contrario, lorsqu'une firme est plus soucieuse de la



sécurité de son logiciel qu'une autre, les éditeurs peuvent prendre des décisions de nature différente. L'une choisira de bloquer tous les pirates et l'autre leur laissera le champ libre. Deux cas supplémentaires peuvent donc apparaître : (P, \bar{P}) ou (\bar{P}, P) . Par conséquent, les consommateurs peuvent être placés dans une industrie non protégée (\bar{P}, \bar{P}) , totalement protégée (P, P) , ou partiellement protégées $(P, \bar{P}), (\bar{P}, P)$. Lorsqu'une firme décide d'empêcher toute utilisation frauduleuse de son logiciel, d'anciens pirates, ne pouvant plus profiter du bien, seront prêts à acheter le logiciel et à passer dans la légalité.

De plus, pour chacune des situations précédentes les éditeurs ont la possibilité de choisir des politiques de prix de même nature mais aussi de nature différente. Ils peuvent simultanément discriminer (D, D) ou mettre en place une commercialisation à prix uniformes (FOB, FOB). Un choix asymétrique conduira aux systèmes de prix (D, FOB) ou (FOB, D). Par conséquent, le niveau d'utilité obtenu dans ces différentes situations guidera la clientèle potentielle lors de sa prise de décisions.

Les professionnels obtiennent avec une commercialisation uniforme des logiciels le niveau d'utilité :

$$U(x, i) \equiv \mathbf{s} + \mathbf{m}_i - CT_i - p_i^N \quad \text{avec } i=A, B \quad (1)$$

\mathbf{s} est le supplément de satisfaction que procure l'assistance technique de l'éditeur i ; p_i^N est le prix uniforme pour le logiciel i et CT_i le coût de transport. Ce coût de transport est engendré par la distance que doit parcourir le professionnel pour aller acheter son bien. Lorsque le coût de transport par unité de distance est normalisée à un, il représente x si $i=A$ et $1-x$ si $i= B$. Nous supposons que ces clients potentiels ne se risquent pas à pirater les logiciels même si aucune précaution anti-piratage n'est prise par les éditeurs. Les sanctions auraient de trop lourdes conséquences sur leurs activités. De plus, le support technique offert par l'éditeur i a une relative importance pour eux. En effet, si le prix du logiciel vendu par la firme i est inférieur à l'utilité apportée par le service après vente, $p_i < \mathbf{s}$, le piratage ne leur paraît jamais profitable. Ils n'obtiendraient qu'une utilité de $U(x, i) \equiv \mathbf{m}_i - CT_i$. De plus, si l'importance qu'ils accordent aux effets de réseaux sont tels que $\mathbf{m} < 1/2$, tous les professionnels ont intérêt à acheter un logiciel car $U(x, i) > 0$, confère Shy et Thisse (1999) lemme 1. Dans la suite de cet article nous considèrerons seulement le cas ou $p_i < \mathbf{s}$ et $\mathbf{m} < 1/2$. Avec des prix discriminatoires, l'utilité obtenue par ces professionnels devient :

$$U(x, i) \equiv \mathbf{s} + \mathbf{m}_i - p_i^D \quad \text{avec } i=A, B \quad (2)$$

Cette fois ils bénéficient du service de livraison à domicile, les coûts de transport sont pris en charge par la firme i .

Les consommateurs privés, quant à eux, retirent une utilité différente de l'emploi d'un logiciel, ce qui engendre un comportement différent de celui des professionnels. En effet, les acheteurs privés ne valorisent pas le suivi client qui accompagne leur achat.

Si le degré de sécurité des logiciels est faible, ils les utiliseront sans les payer en les piratant.

Un pirate aura comme utilité, quelle que soit la politique de prix adoptée par les éditeurs :

$$U(y, i) = \mathbf{m}_i - CT_i \quad (i = A, B); \quad CT_i = y \text{ pour } i = A \text{ et } CT_i = 1-y \text{ pour } i = B \quad (3)$$

A contrario, si la protection est renforcée et qu'aucun piratage n'est possible, certains accepteront d'acheter leur logiciel pour continuer à l'utiliser. Un honnête client obtiendra, lors d'une commercialisation à prix uniformes :

$$U(y, i) = \mathbf{m}_i - CT_i - p_i^N \quad (i = A, B); \quad CT_i = y \text{ pour } i = A \text{ et } CT_i = 1-y \text{ pour } i = B \quad (4)$$

et lors d'une commercialisation discriminatoire : $U(y, i) = \mathbf{m}_i - p_i^{L^D}$, $i = A, B$ (5)

Par conséquent, les décisions des consommateurs privés vont se répartir de la manière suivante : *Premièrement*, si aucune mesure anti-piratage ne protège les logiciels, les clients les plus proches de l'éditeur i vont choisir entre pirater son programme ou ne pas l'utiliser. Les plus éloignés ne seront pas intéressés par une quelconque utilisation de ce bien, car le logiciel sera trop distant ou trop différent de ce qu'ils souhaitent utiliser, le coût d'utilisation est plus élevé que le bénéfice retiré, $\mathbf{m}_i < CT_i$. Alors, au centre du marché aucun consommateur n'utilisera de logiciel, même gratuit. Les consommateurs privés seront donc répartis en trois groupes. Les pirates du logiciel A et du logiciel B sont respectivement aux extrémités gauche et droite du marché, et les non utilisateurs sont au centre. Le consommateur \hat{y}_A , dont l'utilité $U(\hat{y}_A, A) = -\hat{y}_A + \mathbf{m}_A$ s'annule, est indifférent entre pirater A et ne pas l'utiliser ; et \hat{y}_B , dont l'utilité $U(1 - \hat{y}_B, B) = -(1 - \hat{y}_B) + \mathbf{m}_B$ s'annule, est indifférent entre le piratage de B et ne pas l'utiliser.

Deuxièmement, si les éditeurs mettent en place des mesures de protection, le piratage ne sera plus tout possible et les consommateurs privés auront le choix, plus restreint, entre acheter un logiciel ou ne pas l'utiliser. Les seuls utilisateurs privés seront les personnes qui s'acquitteront d'une licence. Au centre du marché, avec le paiement obligatoire des logiciels, les non utilisateurs continuent à ne pas s'intéresser aux logiciels qu'ils pouvaient déjà utiliser gratuitement en les piratant. Les pirates reconvertis en utilisateurs légaux se situent aux extrémités du marché. Le dernier consommateur privé à accepter de payer, un prix uniforme ou discriminatoire, pour le logiciel i est respectivement celui dont l'utilité s'annule $U(\hat{y}_A, A) = 0$ et $U(1 - \hat{y}_B, B) = 0$.

Passons à la détermination des prix auxquels vont devoir faire face les clients, professionnels et consommateurs privés. Suivant les types de sécurité et de commercialisation mis en œuvre par les éditeurs, seize sous cas peuvent apparaître et donc être étudiés. En effet, pour les quatre configurations de sécurité, nous allons déterminer le comportement des agents face aux quatre systèmes de prix possibles.

4. LES PRIX D'EQUILIBRE DANS UNE INDUSTRIE NON PROTEGEE

En l'absence de protection anti-piratage, la politique de prix adoptée par les éditeurs va seulement influencer les décisions d'achat des professionnels (groupe 1). Quant aux utilisateurs privés (groupe 2), ils vont pratiquer le piratage quel que soit le type de commercialisation mis en place.

4.1 COMMERCIALISATION DES LOGICIELS A PRIX UNIFORMES

Dans ce cas, les éditeurs A et B utilisent la politique de prix uniformes. Les professionnels s'acquittent pour le même logiciel d'un prix identique, et doivent se déplacer pour l'acquérir. S'ils ne désirent pas faire le déplacement, les firmes peuvent les livrer en leur faisant payer les frais réels du transport. Le prix livré non discriminatoire est représenté par la somme du prix usine et des frais de transport $p_i^F = p_i^N + CT_i$. La possibilité d'utiliser illégalement les logiciels conduit les consommateurs privés à ne jamais acheter d'application informatique mais à les pirater. Cette situation est étudiée par Shy et Thisse (1999). Ils aboutissent aux résultats suivants.

Le professionnel situé en x sur le marché est indifférent entre acheter le bien A et le bien B si ces deux biens lui procurent la même utilité, ce que vérifie l'égalité suivante : $s + m_A - x - p_A^N = s + m_B - (1-x) - p_B^N$. La localisation de ce consommateur marginal sera :

$$\hat{x} = \frac{1 + m(n_A - n_B) + p_B - p_A}{2} \quad (6)$$

Le consommateur privé indifférent entre pirater le logiciel A et ne pas l'utiliser est $\hat{y}_A = m_A$, solution de $U(\hat{y}_A, A) = -\hat{y}_A + m_A = 0$. Le consommateur indifférent entre pirater le logiciel B et le fait de ne pas l'utiliser est $\hat{y}_B = 1 - m_B$, solution de l'équation $U(1 - \hat{y}_B, B) = -(1 - \hat{y}_B) + m_B = 0$. Les prix d'équilibre et les profits d'équilibre sont :

$$p_A^{N*} = p_B^{N*} = \frac{1 - 2m}{1 - m} \text{ et } p_A^{\overline{PP}-FF} = p_B^{\overline{PP}-FF} \text{ (voir annexe)} \quad (7)$$

4.2 COMMERCIALISATION DES LOGICIELS A PRIX DISCRIMINATOIRES

Dans ce cas, les éditeurs A et B vendent leur logiciel à des prix discriminatoires. Voyons le comportement d'achat des professionnels et la réaction des consommateurs privés.

4.2.1 Le marché des professionnels

Les professionnels bénéficient du service de livraison qu'offrent les éditeurs. La clientèle professionnelle s'acquitte pour l'achat d'un logiciel d'un prix global tout compris $p_i^{L^D}$. Contrairement à la commercialisation à prix uniformes, les coûts réels de transport ne sont pas entièrement répercutés sur le prix de vente. De cette façon, chaque professionnel x débourse un prix net, $p_i^N(x) = p_i^{L^D} - CT_i$, différent de son voisin. Les éditeurs profitent des goûts différents des clients pour discriminer entre eux. Les clients les plus proches déboursent un prix net proportionnellement plus élevé que ceux éloignés, les prix baissant avec la pression concurrentielle. Les éditeurs ne vendront qu'aux acheteurs qui acceptent de payer un prix livraison inclus, $p_i^{L^D}$, suffisamment élevé pour couvrir le coût marginal total CmT_i . Ici, il se résume au coût de transport CT_i par logiciel.

La revente de logiciels neufs entre professionnels est également supposée non rentable car difficilement réalisable. En effet, chaque professionnel préférera s'adresser directement aux éditeurs d'origine. Il bénéficiera ainsi d'une assistance technique de qualité, difficilement égalable par des revendeurs étrangers à la création et à la fabrication du produit. Par conséquent, le prix demandé à un professionnel est indépendant de celui demandé à un autre professionnel. Les éditeurs se concurrencent en prix pour chaque client du marché séparément. Cette concurrence est représentée par une succession de jeux de Bertrand pour chaque localisation de l'économie. D'un point à l'autre du marché les prix sont des variables stratégiques indépendantes.

De plus, chaque logiciel procure à l'ensemble de leurs utilisateurs des externalités positives de réseau. La firme la plus éloignée du client, désavantagée par la distance, devra vendre son bien à un prix égal à son coût marginal total net des effets de réseaux. Pour rester attractive aux yeux des professionnels, elle se doit de fixer son prix le plus faible possible. Par contre, sa rivale, avantagée par la distance, pourra fixer un prix très légèrement inférieur pour capter l'ensemble des consommateurs. Ainsi, le marché sera segmenté en deux parties, chacune gérée par la firme avantagée par la distance. La frontière des marchés est donnée par l'intersection des coûts de transport nets des effets réseaux. Les prix d'équilibre seront :

$$p_i^{L^D*} = \max \{ CmT_i - m_i; CmT_j - m_j \} \text{ i.e. } p_i^{L^D*} = \max \{ x - m_i; (1-x) - m_j \}.$$

Cet équilibre

est différent de celui obtenu par Lederer et Hurter (1986) ou par Thisse et Vives (1988), $p_i^{D*} = \max \{ CmT_i; CmT_j \}$, où les effets de réseau n'étaient pas pris en compte.

Sur son aire de marché, chaque éditeur fixera ses prix au niveau du coût marginal total de son concurrent net des effets réseaux.

En absence de protection contre le piratage et avec une commercialisation discriminatoire, les éditeurs, A et B, vont devoir faire face aux demandes suivantes :

$$\hat{x} = \frac{1 - m m_B + m m_A}{2} \text{ et } 1 - \hat{x} = \frac{1 - m m_A + m m_B}{2} \quad (8)$$

L'éditeur A livrera l'ensemble des consommateurs qui sont situés entre 0 et \hat{x} et l'éditeur B ceux placés de \hat{x} à 1.

4.2.2 Le marché des consommateurs privés

Les utilisateurs privés, en revanche, n'achèteront jamais de logiciel. L'absence de sécurité protégeant les applications informatiques permet à certains consommateurs y de les pirater, les autres considèrent les logiciels A et B, malgré leur « caractère gratuit », comme trop éloignés de leurs préférences. Comme il a été précisé précédemment, le groupe d'agents privés se répartit sur trois zones : à l'extrémité gauche du marché les pirates du logiciel A, à l'extrémité droite les pirates du logiciel B et au centre les non utilisateurs. Le dernier consommateur y à pirater le bien A est $\hat{y}_A = m m_A$ et le dernier à pirater B est $\hat{y}_B = 1 - m m_B$.

Par conséquent, l'expression du nombre total d'utilisateurs, légaux et illégaux, des logiciels A et B est respectivement : $n_A = \hat{x} + \hat{y}_A$ et $n_B = (1 - \hat{x}) + (1 - \hat{y}_B)$. Après la résolution de ces deux équations, qui nous donne les valeurs d'équilibre de n_A^* et n_B^* , $\frac{1}{2(1-m)}$, nous obtenons les prix et les profits d'équilibre (dans suite de l'article disponible dans l'annexe)

$$\text{suivants : } p_A^{D*} = (1-x) - m m_B^*, p_B^{D*} = x - m m_A^* \text{ et } p_A^{\overline{PP-DD}} = p_B^{\overline{PP-DD}} = \frac{1}{4} \quad (9)$$

Seul le marché des professionnels rapporte directement de l'argent aux éditeurs, la présence des « pirates » génère indirectement des profits en augmentant la demande des utilisateurs légaux. En effet, dans l'activité économique la demande des entreprises en logiciels est directement liée à la connaissance des logiciels par leur personnels, connaissance acquise souvent avant l'embauche sur des applications piratées.

Dans les deux paragraphes précédents, nous avons seulement considéré que les éditeurs optaient pour un système de prix identique. Ils sont également libres de choisir une commercialisation de nature différente. Cela peut conduire à des couples de prix asymétriques telles que (FOB, D) ou (D, FOB) que nous étudions à présent.

4.3 COMMERCIALISATION ASYMETRIQUE DES LOGICIELS

Dans ce cas, les éditeurs ont décidé de mettre en place une commercialisation différente pour leur logiciel. La firme qui choisit de vendre son bien avec des prix uniformes, notés FOB, est supposée fixer son prix en premier, ce qui lui donne une position de leader sur le marché, pour une justification de cette hypothèse se reporter aux travaux de Philips (1983), Thisse et Vives (1988), Thisse et Vives (1992). En effet, l'éditeur concurrent attendra de connaître les prix imposés par sa rivale pour fixer les siens. En concurrence spatiale, cette situation est interprétée comme un système de prix avec point de parité. Quelle que soit la firme qui livre réellement les consommateurs, ils s'acquittent du prix et des coûts de transport que le leader pourrait leur réclamer. Cela s'explique par le fait que la localisation du leader sert de point de référence à la détermination des prix dans l'industrie.

Si la firme A adopte les prix FOB, elle fixera en premier son prix « départ usine » p_A^N . Sa concurrente, sachant que le logiciel A coûtera aux consommateurs le prix livré net des externalités positives de réseau, $p_A^{LF} - m_A$, il en profitera pour fixer un prix discriminatoire p_B^{LD} très légèrement inférieur, $p_B^{LD} = p_A^{LF} - e$. De cette façon, l'éditeur B pourra capter l'ensemble des professionnels pour qui le niveau de son coût marginal total net est inférieur au prix livré de sa rivale. Ainsi, la frontière des aires de marchés sera la localisation qui vérifie cette égalité $p_A^{LF} - m_A = CmT_B - m_B$ i.e. $p_A^N + x - m_A = (1-x) - m_B$. Par conséquent, avec le système de prix FOB-D, le consommateur marginal x sera :

$$\hat{x} = \frac{1 - p_A + m_A - m_B}{2} \quad (10)$$

L'éditeur A devra faire face à la demande des professionnels situés à gauche de \hat{x} et l'éditeur B à droite.

Quant aux utilisateurs privés, y , ils ne paient pas les logiciels dont ils profitent. Ces utilisateurs illégaux des biens A et B sont toujours au nombre de $\hat{y}_A = m_A$ et de $1 - \hat{y}_B = m_B$. En conséquence, le nombre d'utilisateurs total des applications A et B est respectivement $n_A = \hat{x} + \hat{y}_A$ et $n_B = (1 - \hat{x}) + (1 - \hat{y}_B)$. La résolution de ces deux équations donne l'expression de n_A et n_B que nous pouvons substituer dans celles des demandes \hat{x} et $1 - \hat{x}$. La détermination du prix uniforme d'équilibre p_A^{N*} permettra d'obtenir les valeurs d'équilibre de n_A^* et n_B^* . La firme A choisira le prix uniforme, p_A^{N*} , qui maximisera son profit $p_A^{\overline{PF-FD}} = p_A^N \cdot \hat{x}$. La meilleure réaction de l'éditeur B à ce prix est



$p_B^{L^D*} = \max \{ p_A^{N^*} + x - m_A^*; CmT_B - m_B^* \}$. Ainsi, il pourra demander au $\frac{3}{4}$ des professionnels (\hat{x}^*) le prix $p_B^{L^D*}$, d'un montant égal à celui que le leader aurait demandé aux consommateurs pour les livrer.

Avec ce système de prix (FOB, D) les firmes obtiennent les prix et les profits d'équilibre suivants : $p_A^{N^*} = \frac{2m-1}{2(m-1)}$ et $p_A^{L^F*} = p_B^{L^D*} = p_A^{N^*} + x - m_A^*$ et p_A^{FF-FD} , p_B^{FF-FD} (11)

Dans le cas (D-FOB), les éditeurs A et B se trouvent dans une situation symétrique de celle décrite précédemment. L'éditeur B commercialise son logiciel avec des prix FOB alors que l'éditeur A le vend avec des prix discriminatoires. Ainsi, les résultats précédents seront inversés.

Quel que soit le type de commercialisation en vigueur dans l'industrie étudiée, les éditeurs se sont exclusivement concurrencés sur le marché des professionnels. Les utilisateurs privés profitent du manque de protection, ou de leurs faiblesses, pour pirater les logiciels A ou B. Ces utilisations illégales sont un manque à gagner pour les éditeurs. Ce phénomène, dans la réalité économique prend des ampleurs considérables avec le développement d'Internet et la démocratisation des accès à hauts débits. Pour l'éradiquer, les éditeurs ont la possibilité de mettre en place des protections anti-piratage efficaces. Ces protections obligeront certains de ces consommateurs privés à participer à l'effort de développement des logiciels à travers leur achat. Reprenons l'analyse des prix, (de cette section 4), mais cette fois dans un environnement informatique totalement protégé. Les éditeurs A et B empêcheront tout piratage de leur logiciel.

5. LES PRIX D'EQUILIBRE DANS UNE INDUSTRIE TOTALEMENT PROTEGEE

Le degré de protection des logiciels choisi par les éditeurs n'influence pas directement le comportement d'achat des professionnels, l'expression de leur utilité n'est pas modifiée. Par conséquent, quelle que soit la politique de prix choisie par les éditeurs A et B, l'expression de la demande des professionnels en logiciels protégés est identique à celle des logiciels non protégés. Par contre, du fait de la forte protection des logiciels, un choix plus restreint s'offrent aux consommateurs privés : acheter ou ne pas utiliser. Ces consommateurs achèteront un logiciel seulement si son prix de vente ne dépasse pas l'utilité qu'ils retirent des effets de réseau. En effet, ne valorisant pas le suivi client, les prix de vente doivent être suffisamment bas pour motiver leur achat. Rappelons brièvement les résultats de Shy et

Thisse pour une commercialisation uniforme, introduisons ensuite la possibilité d'une commercialisation discriminatoire.

5.1 COMMERCIALISATION DES LOGICIELS A PRIX UNIFORMES

Comme nous l'avons précisé dans le cas sans protection, tous les consommateurs privés ne désirent pas utiliser un logiciel, confère Shy et Thisse (1999) lemme 2. Le fait de devoir impérativement payer pour l'utiliser ne modifiera évidemment pas ce choix. Ainsi, Shy et Thisse distinguent deux cas possibles : un équilibre en prix faibles, où certains consommateurs privés achètent des logiciels, et un équilibre en prix élevés, où seuls les professionnels ont les moyens financiers d'acquérir des logiciels.

Premièrement, lorsque les éditeurs A et B proposent des prix modérés, certains consommateurs privés accepteront de les payer. En effet, le dernier client privé à acheter le logiciel A est \hat{y}_A dont l'utilité $U(\hat{y}_A, A) = \mu n_A - y_A - p_A^N$ s'annule. Le dernier client privé (le plus proche) de l'éditeur B est \hat{y}_B , dont l'utilité $U(\hat{y}_B, B) = \mu n_B - (1 - y_B) - p_B^N$ s'annule. Dans ce cas, le nombre légaux d'utilisateurs privés du logiciel A est $\hat{y}_A = \mu n_A - p_A^N$ et celui de B est $1 - \hat{y}_B = \mu n_B - p_B^N$. L'ensemble des utilisateurs, professionnels et privés s'acquitteront des prix, p_A^{N*} et p_B^{N*} , et les éditeurs verront leurs profits atteindre :

$$p_A^{N*} = p_B^{N*} = \frac{1-2\mu}{5-8\mu} \text{ et } p_A^{PP-FF} = p_B^{PP-FF} = \frac{(1-2\mu)(3-4\mu)}{2(1-\mu)(5-8\mu)} \quad (12)$$

Les éditeurs A et B adopteront ce niveau de prix pour $\mu > 0,399$. En effet, lorsque les utilisateurs accordent une importance plus faible aux externalités de réseau $\mu < 0,399$, les éditeurs peuvent être amenés à dévier de cet équilibre en fixant des prix beaucoup plus élevés, au risque de perdre l'ensemble de leur clientèle privée. L'absence d'acheteurs privés est le deuxième cas décrit par Shy et Thisse.

Deuxièmement, les éditeurs A et B fixent des prix trop élevés pour attirer les consommateurs privés y . Ils obtiendront de la vente de logiciels aux professionnels les profits

$$p_i^{PP-FF-E} = \frac{(1-\mu)}{2} \text{ en fixant le prix, } p_i^{N*} = 1-\mu. \text{ Pour tout } \mu < 0,438, \text{ ils n'auront aucune}$$

incitation à dévier de l'équilibre en fixant des prix plus bas.

Shy et Thisse concluent, dans leur proposition 4, que le nombre total d'utilisateurs de logiciels diminue avec la protection, ainsi que les profits des firmes. Ce résultat est valable dans deux cas, premièrement lorsque les prix ne sont pas trop élevés aux yeux des utilisateurs privés et que $0,399 < \mu < 0,438$, et deuxièmement pour l'ensemble des prix lorsque

$0.438 < \mu < 1/2$. Shy et Thisse obtiennent ces résultats en considérant que les éditeurs utilisent exclusivement des prix uniformes.

L'adoption d'une commercialisation discriminatoire modifie-t-elle le comportement d'achat des utilisateurs privés et l'intérêt des éditeurs pour les protections anti-piratage? C'est ce que nous allons voir dans les paragraphes suivants.

5.2 Commercialisation des logiciels à prix discriminatoires

Dans ce cas, les éditeurs se concurrencent pour l'ensemble des clients potentiels, professionnels et consommateurs privés.

Contrairement au cas de la commercialisation à prix uniformes l'ensemble des consommateurs privés achète un logiciel protégé. La force des éditeurs discriminants est qu'ils livrent gratuitement le bien à domicile. De cette manière, ils mettent à la disposition des clients la version qui leur paraît idéale. La discrimination permet à un éditeur de demander des prix plus élevés aux clients captifs et de suffisamment baisser les prix pour attirer les consommateurs trop éloignés ou non intéressés à priori par l'utilisation de son logiciel. Le point d'intersection des coûts marginaux des éditeurs, \hat{x} et \hat{y} , détermine la zone d'influence de chaque firme sur chaque marché. Ces zones recouvrent les aires du marché où l'utilité des consommateurs, et donc leur demande, est positive. Les demandes en logiciels A et B, venant des professionnels et des privés, sont de la forme suivante :

$$\hat{x} = \hat{y} = \frac{1 - m_B + m_A}{2} \text{ et } 1 - \hat{x} = 1 - \hat{y} = \frac{1 - m_A + m_B}{2} \quad (13)$$

La demande des professionnels est identique au cas sans protection, elle a été précisée dans l'équation (8).

Le nombre total d'utilisateurs des logiciels A et B est différent de celui obtenu dans une industrie informatique sans protection. En substituant leur valeur d'équilibre, n_A^* et n_B^* , dans les expressions des demandes des professionnels et des privés, nous obtenons $\hat{x}^* = \hat{y}^* = 1/2$ et $1 - \hat{x}^* = 1 - \hat{y}^* = 1/2$. Pour tous ces consommateurs, les éditeurs fixent leurs prix discriminatoires égaux au coût marginal net de leur concurrent. Cela conduit à des prix inférieurs aux prix uniformes. Seul les clients localisés à chaque extrémité du marché s'acquitteront d'un prix aussi élevé. Les prix et les profits d'équilibre des éditeurs sont :

$$p_A^{L^*} = CmT_B - \mu n_B^* = (1 - x) - \mu \text{ et } p_B^{L^*} = CmT_A - \mu n_A^* = x - \mu$$

$$p_A^{PP-DD} = p_B^{PP-DD} = 1/2 \quad (14)$$

Pour ces valeurs d'équilibre, nous pouvons vérifier que les surplus des utilisateurs privés des logiciels A et B, $S_{DD}^{PP}(\hat{y}, A)$ et $S_{DD}^{PP}(\hat{y}, B)$, restent positif pour $\mu > 0.25$, et qu'ils sont égaux à $\frac{3}{2}\mu - \frac{3}{8}$.

De plus, en présence de prix discriminatoires, il n'existe qu'un équilibre à prix faibles, contrairement à la commercialisation uniforme où un équilibre à prix élevés est soutenable. En effet, aucun des éditeurs n'a intérêt à dévier en fixant des prix plus élevés car, immédiatement, le concurrent fixera un prix faiblement inférieur pour chaque consommateur indépendamment. La pression concurrentielle va conduire les prix discriminatoires à leur niveau le plus bas possible.

Sur un marché protégé, les éditeurs sont également libres de choisir une commercialisation de nature différente. Les systèmes de prix D-FOB et FOB-D sont les résultats d'une commercialisation asymétrique que nous analysons.

5.3 COMMERCIALISATION ASYMETRIQUE DES LOGICIELS

Lors d'une commercialisation asymétrique, certains clients se déplacent pour aller acheter leur logiciel à des prix uniformes, alors que d'autres sont livrés et s'acquittent de prix discriminatoires.

Dans le cas d'une commercialisation FOB-D, l'éditeur A devient le leader de l'industrie. Le point d'intersection du prix livraison inclue du logiciel A, p_A^L , et du coût marginal de l'éditeur B, $CmT_B - \mu n_B$ délimitent les aires d'influences des éditeurs. L'éditeur B (resp. A) contrôle le marché des professionnels de \hat{x} à 1 (resp. de 0 à \hat{x}), et le marché des consommateurs privés de \hat{y} à 1. Il est le seul à vendre son bien à l'ensemble des clients potentiels, professionnels et privés, et cela grâce à la commercialisation à prix discriminatoires. L'éditeur A, quant à lui, n'attirera que \hat{y}_A consommateurs privés sur les \hat{y} qu'il peut réellement livrer. Nous obtenons : $\hat{y} = \hat{x} = \frac{1 - p_A^N + m_A - m_B}{2}$ (15)

L'expression de la demande des professionnels en logiciel sécurisés \hat{x} est identique à celle des logiciels non sécurisés, donnée par l'équation (10)

Les seuls consommateurs privés intéressés par l'achat du logiciel A sont au nombre de $\hat{y}_A = \mu n_A - p_A^N$. Le dernier client à retirer une utilité $U(y, A) = \mu n_A - p_A^L$ positive est celui localisé en \hat{y}_A , alors que l'ensemble des clients de l'éditeur B obtient une utilité $U(y, B) = \mu n_B - p_B^N - (1 - y)$ toujours positive, la demande s'adressant à cet éditeur est de \hat{y} .

Par conséquent, le nombre d'utilisateurs légaux du logiciels A est $n_A = \hat{x} + \hat{y}_A$, et celui de B est $n_B = (1 - \hat{x}) + (1 - \hat{y})$. La résolution de ces deux équations, nous donne les expressions de n_A et n_B en fonction du prix usine de la firme A. La substitution de ces expressions dans les demandes, nous permet de déterminer le prix d'équilibre $p_A^{N^*}$ et ensuite le prix discriminatoire $p_B^{L^D^*}$. Avec une commercialisation FOB-D, les éditeurs obtiennent les prix et les profits suivants :

$$p_A^{N^*} = \frac{(2\mu - 1)}{2(2\mu - 3)} \text{ et } p_A^{L^F^*} = p_A^{N^*} + Z - \mu n_A^* \text{ avec } Z = x, y \text{ et } n_A^* = -\frac{1}{2(\mu - 2)}$$

$$p_B^{L^D^*} = \frac{(2\mu - 1)}{2(2\mu - 3)} + Z + \frac{\mu}{2(\mu - 2)} \text{ et } p_A^{PP-FD} \text{ et } p_B^{PP-FD} \quad (16)$$

Nous pouvons vérifier que les acheteurs privés obtiennent une utilité positive. En effet, pour ces valeurs d'équilibre, le surplus des utilisateurs des logiciels A et B, $S_{FD}^{PP}(\hat{y}_A, A)$ et $S_{FD}^{PP}(\hat{y}, B)$, est positif. Le premier est positif quel que soit μ , et le second l'est pour $\mu > 0,313$.

Deuxièmement, pour une commercialisation D-FOB, les firmes sont placées dans une situation symétrique à celle décrite précédemment. L'éditeur B devient le leader du marché. En utilisant la même méthodologie que précédemment nous obtenons des résultats inversés au cas précédent.

Contrairement à la commercialisation uniforme, seule l'équilibre à prix faible sera soutenable, cet équilibre apparaîtra malgré l'incitation de la firme leader d'instaurer un équilibre à un niveau de prix plus élevés. L'équilibre à prix élevés n'est pas réalisable car l'éditeur discriminant aura toujours intérêt à proposer des prix plus faibles. Il recherchera à lancer une guerre de prix qui lui sera bénéfique. Le leader non discriminant sera obligé de suivre la baisse des prix pour conserver ses parts de marché.

En effet, une augmentation des prix sur le marché des professionnels sera profitable pour l'éditeur leader, il gagnera un profit de $(1 - \mu)/8$ plus grand que celui qu'il obtenait lorsqu'il vendait aux deux catégories de consommateurs $\frac{2\mu - 1}{4(2 - \mu)(2\mu - 3)}$. En effet, un rapide calcul

nous donne $p_A^{PP-FD} - \frac{1 - m}{8}$, et $p_B^{PP-DF} - \frac{1 - m}{8} > 0$. L'augmentation des prix compensera la

chute de revenu engendrée par la perte de la clientèle privée, ayant une faible propension à payer.



Cependant, l'éditeur discriminant n'a aucun intérêt à suivre le leader dans un processus d'augmentation des prix. Il perdrait l'ensemble de ses clients privés, ce qui ferait baisser ses profits. Il n'obtiendrait plus qu'un montant de profit de $9/16$, au lieu du profit à prix faibles $\frac{(4\mu - 7)^2}{2(\mu - 2)^2(2\mu - 3)^2}$, obtenu précédemment. En effet, Un rapide calcul nous donne $p_A^{PP-DF} - (9/16)$, et $p_B^{PP-FD} - (9/16) < 0$.

Ce conflit d'intérêt entre les éditeurs est dû à la plus forte présence de l'éditeur discriminant sur le marché des consommateurs privés. Cet éditeur a beaucoup plus à perdre que son concurrent.

Dans les deux dernières sections, 4 et 5, nous avons considéré que les éditeurs choisissent le même degré de protection pour leur logiciel. Il est soit très faible, et le piratage est possible, soit très élevé, et le piratage est totalement impossible. D'autres situations sont également envisageables. Par exemple, un éditeur peut être plus soucieux de la sécurité de son programme que ne l'est son rival. Ils peuvent donc être amenés à prendre des décisions de nature différente où l'un opterait pour une politique anti-piratage et l'autre non. Dans ce cas, l'industrie deviendrait partiellement protégée. C'est ce dernier cas que nous allons analyser dans la section suivante.

6. LES PRIX D'EQUILIBRE DANS UNE INDUSTRIE PARTIELLEMENT PROTEGEE

Comme nous l'avons vu précédemment, le comportement d'achat des professionnels n'est pas directement influencé par le degré de protection des logiciels, alors qu'il modifie directement les décisions des consommateurs privés. Dans une industrie partiellement protégée les protections anti-piratages ne concernent qu'une partie des clients privés car un seul éditeur protège son logiciel. Certains utilisateurs privés pirateront le logiciel qu'ils désirent utiliser, alors que d'autres seront contraints de l'acheter.

Les prix fixés par les éditeurs pour la vente de leur programme influence l'ensemble des clients potentiels sans distinction. Déterminons le niveau des prix d'équilibre pour les quatre systèmes de prix possibles en rappelant brièvement les résultats de Shy et Thisse pour la commercialisation uniforme, et ensuite, en introduisant la commercialisation discriminatoire. Nous considérons, ci-dessous, que l'éditeur A est le plus soucieux de la sécurité de ses logiciels, et qu'il met en place des protections efficaces contre tout piratage. L'ensemble des résultats obtenus sera symétrique lorsque la firme B protège à son tour ses logiciels.

6.1. COMMERCIALISATION DES LOGICIELS A PRIX UNIFORMES

Lorsque les logiciels A et B sont vendus à des prix uniformes, Shy et Thisse distinguent deux équilibres de prix possibles, comme pour les industries non protégées et totalement protégées. Dans le premier, les prix sont fixés à un niveau suffisamment faible pour que certains consommateurs privés puissent être intéressés par l'achat d'un logiciel. Dans le deuxième, où les prix sont fixés à un niveau plus élevé, aucun consommateur privé n'achète de logiciel. Pour ces deux équilibres en prix, l'éditeur B subit un piratage.

L'équilibre à prix faibles, permet à l'éditeur A de vendre aux deux groupes de clients, professionnels et privés. Les protections anti-piratage de son logiciel obligent les consommateurs à l'acheter pour l'utiliser. Les acheteurs privés représentent $\hat{y}_A = \mu n_A - p_A^N$ de sa clientèle. L'éditeur B, lui, plus laxiste sur la sécurité, ne pourra vendre qu'aux professionnels. Il subit un piratage à hauteur de $1 - \hat{y}_B = \mu n_B$, les utilisateurs privés de B sont tous des utilisateurs illégaux qui ne lui rapportent aucun profit direct.

Les demandes des professionnels en logiciels, A et B, sont toujours \hat{x} et $1 - \hat{x}$, données par l'équation (6). Par conséquent, le nombre total d'utilisateurs de A est $n_A = \hat{x} + \hat{y}_A$ et celui de B est $n_B = (1 - \hat{x}) + (1 - \hat{y}_B)$.

Sachant cela, ces éditeurs maximisent leurs profits, en fixant les prix uniformes d'équilibre $p_A^{N^*}$ et $p_B^{N^*}$. Ils obtiendront, ainsi, les paiements suivants :

$$p_A^{N^*} = \frac{3(2\mu - 1)}{16 - 11} \text{ et } p_B^{N^*} = \frac{16\mu^2 - 22\mu + 7}{(\mu - 1)(16\mu - 11)}, \mathbf{p}_A^{P\bar{P}-FF} \text{ et } \mathbf{p}_B^{P\bar{P}-FF} \quad (18)$$

Les éditeurs maintiendront ce niveau de prix pour tout $\mu > 0.399$. Ils n'auront aucune incitation à dévier de cet équilibre en augmentant le niveau de leurs prix.

En ce qui concerne l'équilibre à prix élevés, la situation est plus simple, les éditeurs se concurrencent seulement sur le marché des professionnels. Ils satisfont encore les demandes \hat{x} et $1 - \hat{x}$. Le piratage du logiciel B est toujours présent et représente également \hat{y}_B . Dans ces conditions, où le nombre total d'utilisateurs du logiciel A et B est respectivement $n_A = \hat{x}$ et $n_B = (1 - \hat{x}) + (1 - \hat{y}_B)$, les éditeurs A et B fixent les prix d'équilibre $p_A^{N^*}$ et $p_B^{N^*}$ pour maximiser leurs profits, ce qui leur permet d'obtenir les profits suivants :

$$p_A^{N^*} = \frac{\mu^2 - 6\mu + 3}{3(1 - \mu)} \text{ et } p_B^{N^*} = \frac{2\mu^2 - 6\mu + 3}{3(1 - \mu)}, \mathbf{p}_A^{P\bar{P}-FF} = p_A^{N^*} \hat{x}^* \text{ et } \mathbf{p}_B^{P\bar{P}-FF} = p_B^{N^*} (1 - \hat{x}^*) \quad (19)$$

Ce niveau des prix sera maintenu par les éditeurs pour toutes les valeurs de $\mu < 0.438$. Ils ne trouveront pas profitable de dévier de cet équilibre en baissant le niveau de leur prix.

Ces résultats, de Shy et Thisse, ont été obtenus pour une commercialisation des logiciels à prix uniformes. Passons maintenant à la détermination des prix en présence d'une commercialisation discriminatoire.

6.2. COMMERCIALISATION DES LOGICIELS A PRIX DISCRIMINATOIRES

Lorsque l'éditeur A est le seul à protéger son logiciel, il obtient une position de monopole sur le marché des consommateurs privés. Position que nous qualifions de quasi monopole. En effet, sur ce segment de marché il se trouve, a priori, sans aucune concurrence directe de la part de l'éditeur B. Pourtant, il n'est pas libre de fixer les prix qu'il désire. Il est indirectement concurrencé par la possibilité de pirater son rival B. Les consommateurs privés ont le choix entre payer le logiciel A (au monopoleur) ou pirater le logiciel B. L'éditeur A subit, ainsi, la pression d'une concurrence indirecte et illégale qui réduit sa zone réelle de monopole. Pour rendre le piratage moins intéressant et attirer une partie de la clientèle privée, l'éditeur A va devoir baisser ses prix discriminatoires en les fixant légèrement inférieurs au coût supporté par les consommateurs utilisant un logiciel piraté. La limite de sa part de marché \hat{y} est donc donnée par l'intersection de son coût marginal net $CmT_A - \mu n_A$ et de la perte d'utilité net supporté par les pirates, elle est la solution de l'équation $y - \mu n_A = (1 - y) - \mu n_B$. Les pirates utilisent illégalement un logiciel qui ne leur paraît pas idéal et subissent une perte de satisfaction $(1 - y)$ réduite par l'obtention des externalités positives de réseau μn_B . Les demandes des utilisateurs professionnels et privés en logiciel A sont $\hat{x} = \hat{y} = \frac{1 + \mu n_A - \mu n_B}{2}$.

En ne vendant qu'aux professionnels, l'éditeur B ne satisfait qu'une demande de $1 - \hat{x}$. Son logiciel attire également des pirates qui sont au nombre de $1 - \hat{y}_B = \mu n_B$. Au final, les applications A et B sont utilisées par n_A^* et n_B^* consommateurs, où $n_A^* = \hat{x}^* + \hat{y}^* = \frac{2}{2 - \mu}$ et $n_B^* = (1 - \hat{x}^*) + (1 - \hat{y}_B^*) = \frac{1}{2 - \mu}$. La commercialisation discriminatoire conduit aux prix et

profits d'équilibre suivants:

$$p_A^{L^D*} = 1 - z - \mu n_B^* \text{ et } p_B^{L^D*} = z - \mu n_A^*, z = x, y ; p_A^{P\bar{P}-DD} \text{ et } p_B^{P\bar{P}-DD} \quad (20)$$

Pour ces valeurs d'équilibre, nous vérifions que l'ensemble des acheteurs privés situés de 0 à \hat{y} achètent effectivement le logiciel A, car pour tout $\mu > 0,275$ leur surplus $S_{DD}^{P\bar{P}}(y, A)$ est positif. Il est également possible de vérifier que les consommateurs privés localisés de \hat{y}_B



à 1 pirateront le logiciel B car l'utilisation illégale de ce programme leur procure un surplus $S_{DD}^{PP}(y, B)$ positif.

De plus, contrairement à la commercialisation à prix uniformes le seul équilibre en prix réalisable est bien celui à prix faibles, où les consommateurs privés ont la possibilité d'accéder légalement au logiciel A. L'éditeur A n'a aucun intérêt à soutenir un équilibre à prix élevés. Il perdrait sa clientèle privée et son profit baisserait jusqu'à $\frac{(2\mu-1)^2}{(\mu^2-4\mu+2)^2}$, alors

que celui de la firme B augmenterait jusqu'à $\frac{(\mu-1)^4}{(2-4\mu+\mu^2)^2}$. Un tel équilibre en prix accroît la

marge bénéficiaire de son concurrent B qui ne vend qu'aux professionnels. L'éditeur A finira par dévier en lançant une guerre de prix qui lui permettra d'atteindre l'ensemble des consommateurs.

La commercialisation des logiciels exclusivement discriminatoire n'est pas la seule commercialisation envisageable. Les systèmes de prix FOB-D et D-FOB sont également un type de commercialisation possible. Dans ces cas, les éditeurs adoptent des politiques de prix différentes. Nous allons maintenant rechercher l'équilibre en prix pour ces diverses situations.

6.3. COMMERCIALISATION ASYMETRIQUE DES LOGICIELS

Dans le cas d'une commercialisation asymétrique, comme dans les précédents, seule la politique de prix choisie par l'éditeur A influence le marché privé. L'éditeur B, piraté par les utilisateurs privés, n'influence directement que les décisions des professionnels.

Lors d'une commercialisation FOB-D, l'éditeur A impose à l'ensemble de ses clients, professionnels et privés, des prix uniformes. Son concurrent B utilise la tarification discriminatoire, ce qui l'amène à fixer son prix en dernier. Le fait qu'il n'essaie pas d'empêcher le piratage de son logiciel B peut être interprété comme un moyen détourné de fixer un prix nul. Son laxisme modifie indirectement le jeu de la concurrence sur les deux segments de marchés, professionnels et privés.

Premièrement, il augmente le nombre total d'utilisateurs de son logiciel, ce qui a pour conséquence, grâce aux effets de réseau, d'accroître artificiellement la demande des professionnels.

Ce piratage empêche, également, l'éditeur A de gagner un profit de monopole sur le segment de marché privé. Il est pourtant le seul à y vendre un logiciel, mais il y subit encore une pression concurrentielle indirecte et illégale. Effectivement, les consommateurs ont le choix entre acheter le logiciel A ou pirater le logiciel B. L'éditeur A ne pourra réellement vendre

qu'aux clients privés, pour qui le prix livré net, $p_A^{LF*} - \mu n_A$, est inférieur à la perte d'utilité net qu'ils subiraient en piratant le logiciel B. La zone d'influence de l'éditeur A s'étend donc jusqu'à \hat{y} , solution de l'équation suivante : $p_A^{LF*} - \mu n_A = (1-y) - \mu n_B \Leftrightarrow p_A^N + y - \mu n_A = (1-y) - \mu n_B$. Cependant, il ne vendra réellement qu'aux consommateurs privés localisés de 0 à \hat{y}_A , les seuls à retirer de leur achat une utilité, $U(y, A) = \mu n_A - y - p_A^N$, positive. Il est facile de vérifier que $\hat{y}_A < \hat{y}$. L'éditeur B, quant à lui, n'attirera sur le marché privé que les pirates dont l'utilité $U(y, B)$ est positive, c'est à dire ceux situés de \hat{y}_B à 1 pour qui la perte d'utilité n'est pas trop élevée.

Du fait que les demandes des professionnels en logiciels protégés et non protégés soient identiques, les expressions de \hat{x} et $1-\hat{x}$ sont toujours données par l'équation (10). Le nombre total d'utilisateurs des logiciels A et B est $n_A = \hat{x} + \hat{y}_A$ et $n_B = (1-\hat{x}) + (1-\hat{y}_B)$. Pour cette commercialisation asymétrique FOB-D, les éditeurs fixent les prix d'équilibre, p_A^{N*} et p_B^{L*} , et obtiennent les profits suivants : $p_A^{N*} = \frac{2\mu-1}{2(4\mu-3)}$ et $p_A^{LF*} = p_A^{N*} + Z - \mu n_A^*$, $Z = x, y$ et

$$n_A^* = \frac{1}{4(1-\mu)}, p_B^{L*} = p_A^{N*} + x - \mu n_A^*; p_A^{P\bar{P}-FD} \text{ et } p_B^{P\bar{P}-FD} \quad (21)$$

Avec ces faibles prix d'équilibre, nous vérifions que l'ensemble des acheteurs privés, situés de 0 à \hat{y}_A , achètent effectivement le logiciel A, car pour toutes les valeurs de μ leur surplus $S_{FD}^{P\bar{P}}(y, A)$ est positif. Nous pouvons également vérifier que l'utilité des pirates, $U(y, B)$, s'annule pour \hat{y}_B^* et que leur surplus, $S_{FD}^{P\bar{P}}(y, B)$ est positif de \hat{y}_B^* à 1.

Lors d'une commercialisation D-FOB, l'éditeur A est encore présent sur les marchés des professionnels et des privés, mais cette fois il opte pour des prix de vente discriminatoires. L'éditeur B, lui, ne vend toujours qu'aux professionnels et choisit les prix uniformes, ce qui lui permet de fixer ses prix en premier. Cet éditeur modifie encore le jeu de la concurrence sur les deux segments de marché, professionnel et privé, car il laisse encore possible le piratage de son logiciel. Les utilisateurs privés, choisissant le bien le moins coûteux, légale ou illégale, ce qui oblige l'éditeur A à baisser ses prix discriminatoires jusqu'au niveau du coût supporté par les pirates pour obtenir le logiciel concurrent. Cette fois, il contrôlera le marché privé de 0 à \hat{y} , solution de l'équation $y - \mu n_A = 0 + (1-y) - \mu n_B$, et vendra à l'ensemble de ses acheteurs potentiels. Le nombre total d'utilisateurs des logiciels A et B devient $n_A = \hat{x} + \hat{y}$ et $n_B = (1-\hat{x}) + (1-\hat{y}_B)$. Contrairement à ce qui se passe dans une industrie protégée, les

éditeurs ne se trouvent pas dans une position totalement symétrique à la précédente, et obtiennent les paiements suivants : $p_B^{N*} = \frac{(2\mu - 1)}{\mu - 2}$ sur le marché 1 et $p_B^{N*} = 0$ sur le marché 2,

alors $p_B^{L^F*} = p_B^{N*} + (1 - Z) - \mu n_B^*$, $Z = x, y$ et $n_B^* = \frac{1}{2(2 - \mu)}$ et

$$p_A^{L^D*} = p_B^{L^F*} ; p_B^{P\bar{P}-DF} \text{ et } p_A^{P\bar{P}-DF} \quad (22)$$

Le fait que l'éditeur B n'empêche pas le piratage privé revient pour lui à demander aux consommateurs privés (y) un prix usine nul.

Nous pouvons vérifier que les consommateurs privés localisés de 0 à \hat{y} achèteront effectivement le logiciel A. Pour tout $\mu > 0,269$, ils retirent de leur achat un surplus $S_{DF}^{P\bar{P}}(y, A)$ positif. Nous pouvons également vérifier que les privés situés à droite de \hat{y}_B^* retirent du piratage de B un surplus $S_{DF}^{P\bar{P}}(y, B)$ positif.

Contrairement à la commercialisation à prix uniformes FOB-FOB, les systèmes de prix asymétriques FOB-D et D-FOB aboutissent à un seul équilibre en prix, dont le faible niveau permet à une partie des consommateurs privés d'acheter le logiciel A. Seul l'éditeur B aurait intérêt à maintenir un équilibre à un niveau plus élevé. Une augmentation des prix engendrerait une croissance de son profit qui devrait atteindre, s'il est le leader du marché,

$\frac{(\mu - 1)^3}{4(4\mu - \mu^2 - 2)}$, et $\frac{(2\mu^2 - 6\mu + 3)^2}{4(\mu^2 - 4\mu + 2)^2}$ autrement. Du fait de son unique présence sur le marché

des professionnels, l'éditeur B ne sera pas obligé, comme son rival, de compenser un manque à gagner important sur le segment des consommateurs privés. L'éditeur A, seul à vendre sur ce segment de marché, perdra une partie de sa clientèle et verra son profit diminuer, s'il est le

leader du marché, jusqu'à $\frac{(2\mu - 1)^2}{4(1 - \mu)(\mu^2 - 4\mu + 2)}$ pour $\mu > 0,4$, et jusqu'à $\frac{(3 - 6\mu + \mu^2)^2}{4(\mu^2 - 4\mu + 2)^2}$ s'il

est le suiveur. Par conséquent, en présence de prix trop élevés, l'éditeur A sera incité à lancer une guerre de prix qui lui permettra de vendre aux deux catégories de consommateurs.

Après avoir obtenu le niveau des prix et des profits d'équilibre pour chaque type d'industrie, non protégée, totalement protégée et partiellement protégée, recherchons maintenant pour chacune de ces industries, quelle est la politique de prix optimale pour les éditeurs lors de la commercialisation de leurs logiciels. Nous déterminerons, ensuite, quel est le degré de protection adopté par les éditeurs.

7. LES DECISIONS STRATEGIQUES DES EDITEURS ET LEURS IMPACTS

Shy et Thisse étudient le choix de la protection des logiciels en supposant que les éditeurs vendent exclusivement leurs logiciels à prix uniformes. Dans l'industrie informatique actuelle, où Internet prend de plus en plus d'importance, cette commercialisation à prix uniformes sera-t-elle vraiment la politique de prix utilisée par les éditeurs de logiciels ? Si ce n'est pas le cas, la protection des logiciels est-elle encore non rentable ?

7.1 LE CHOIX DE LA COMMERCIALISATION DES LOGICIELS

Dans un souci de réalisme, nous avons supposé dans ce travail que les éditeurs ont le choix entre deux politiques de prix. Ils sont libres d'utiliser une commercialisation à prix uniformes FOB ou à prix discriminatoires D. Il en découle trois types de systèmes de prix, l'uniforme FOB-FOB, le discriminatoire D-D et même les asymétriques FOB-D et D-FOB. Les éditeurs opteront pour la politique de prix qui leur procure le profit le plus grand, étant donné le comportement de leur rivale. Une simple comparaison des paiements anticipés par ces éditeurs nous permettra de déterminer leur choix. Quel que soit le degré de protection des logiciels, l'étude de la matrice des profits des sous jeux nous conduit à dire que la discrimination par les prix est la stratégie d'équilibre, les détails de cette analyse sont disponibles sur demande dans l'annexe B.

En effet, pour une protection nulle, totale ou partielle, les éditeurs choisiront systématiquement la discrimination, et cela quelle que soit la politique de prix du concurrent. Ainsi, cette politique de prix se présente comme la stratégie dominante, et la commercialisation discriminatoire, D-D, comme l'équilibre de Nash pour ces trois sous-jeux. Par conséquent, les firmes A et B obtiendront, pour une industrie non protégée, les profits $p_A^{\overline{PP}-DD}$ et $p_B^{\overline{PP}-DD}$ d'une valeur d'un quart, voir équation (9). Alors que pour une industrie totalement protégée, ils retireront des profits plus élevés, p_A^{PP-DD} et p_B^{PP-DD} , d'une valeur d'un demi obtenue dans l'équation (14). Pour finir, dans une industrie partiellement protégée, l'éditeur A gagne le profit intermédiaire $p_A^{P\overline{P}-DD}$ alors que B, ne protégeant pas son logiciel, obtient le profit le plus faible $p_B^{P\overline{P}-DD}$, ces profits ont été précisés dans l'équation (20).

Recherchons à présent quel est le degré de protection des logiciels choisi par les éditeurs discriminants.

7.2 LE CHOIX DU DEGRE DE PROTECTION DES LOGICIELS ET SON IMPACT

Shy et Thisse affirment qu'en présence de prix uniformes, les éditeurs choisiraient de ne pas protéger leur logiciel car, les effets de réseau aidant, la protection n'est pas économiquement rentable. Le fait de choisir une commercialisation à prix discriminatoires, leur permet-ils de mieux défendre leur logiciel ? La discrimination par les prix, facilitée par le développement récent d'Internet, rend-t-elle à nouveau profitable les politiques anti-piratage ?

En suivant Shy et Thisse, nous avons supposé que les éditeurs ont le choix entre deux stratégies, protéger efficacement leur programme contre le piratage P ou, au contraire, ne pas le protéger \bar{P} . Trois types d'industrie peuvent donc apparaître, la non protégée (\bar{P}, \bar{P}) , la totalement protégée (P, P) et celles partiellement protégées $(P, \bar{P}) ; (\bar{P}, P)$. Pour ces différentes situations, l'analyse de la matrice des paiements des éditeurs A et B nous donne les résultats suivants, les détails de cette analyse sont données dans l'annexe C, disponible sur demande.

Quelle que soit l'importance accordée par les utilisateurs aux effets de réseau, faibles avec $\mu < 0.399$ ou forts avec $\mu > 0.43$, chaque éditeur optera systématiquement pour la stratégie de protection. L'unique équilibre parfait en sous-jeu est (P, P) où les éditeurs protègent leur logiciel. Le choix de la commercialisation des logiciels à prix discriminatoires permet à ces éditeurs de mettre en place des protections anti-piratage efficaces et rentables. Ceci nous conduit, donc, aux résultats strictement opposés à ceux de Shy et Thisse.

En effet, pour des valeurs de $\mu > 0,2765$ leurs résultats présentent une indétermination, car ils aboutissent systématiquement à deux équilibres. Lorsque les consommateurs accordent une importance modérée aux effets de réseau ($0,2765 < \mu < 0,399$), Shy et Thisse obtiennent les deux équilibres asymétriques (P, \bar{P}) et (\bar{P}, P) où une firme protège son logiciel alors que l'autre non.

Par contre, lorsque les effets de réseau ont une forte importance, $\mu > 0.43$, Shy et Thisse affirment que deux autres équilibres apparaissent : (\bar{P}, \bar{P}) où aucune firme protège son logiciel, et (P, P) où l'ensemble des firmes protège son logiciel. Pour Shy et Thisse il est raisonnable de penser que la stratégie la plus profitable, qui est la non protection, sera celle choisie par les éditeurs.

Ces auteurs montrent que la stratégie de protection ne peut pas être l'équilibre de Nash d'un jeu où les firmes décident, de façon non coopérative, du degré de sécurité de leur logiciel. Ils affirment que cela est un argument rationnel pour expliquer la suppression des



protections des logiciels observées dans le milieu des années 80. Nous venons de montrer que ce résultat est inversé lorsque les éditeurs ont la possibilité de discriminer entre les consommateurs. La discrimination incitera les firmes à mettre en place des protections anti-piratages. Ce résultat nous permet d'expliquer le regain d'intérêt des éditeurs pour la lutte contre le piratage, observé depuis le début du siècle. Actuellement, l'utilisation croissante d'Internet par les ménages et les entreprises facilite l'adoption de prix discriminatoires. En effet, ce nouveau moyen de communication et de distribution des logiciels permet aux éditeurs de mettre en place une discrimination à une grande échelle.

L'utilisation de la discrimination apparaît donc profitable pour les éditeurs. Les prix discriminatoires permettent aux éditeurs de mieux se protéger contre le phénomène de piratage, les consommateurs, quant à eux, bénéficient d'une augmentation du niveau de leur bien être. Ils préféreront acheter des logiciels protégés à prix discriminatoires que des logiciels à prix uniformes. De simples comparaisons des niveaux de surplus suffisent à montrer le bénéfice social généré par cette politique de prix.

La discrimination par les prix conduit également à une augmentation du bien être sociale, les éditeurs et les consommateurs profitent donc de l'utilisation de cette politiques de prix. L'analyse de l'impact de la discrimination est détaillée dans l'annexe D, disponible sur demande.

8. CONCLUSION

L'analyse de Shy et Thisse (1999) a permis d'expliquer la baisse des protections des logiciels constatée dans le milieu des années quatre vingt. Ils ont montré à cette époque que les politiques anti-piratage n'étaient pas rentables pour les éditeurs. Ces politiques avaient pour conséquence de réduire le nombre d'utilisateurs total de leurs logiciels, ce qui faisait baisser la demande des consommateurs du fait des effets de réseau.

A la fin de l'année 1999 et début 2000, le nombre d'utilisateurs du réseau Internet s'est accru très fortement, ce média devient alors un nouveau canal de distribution pour les éditeurs. Il a pour principal avantage de permettre une commercialisation discriminatoire des logiciels à grande échelle et à faibles coûts.

Dans cet article nous venons de voir que la discrimination rend à nouveau rentable la protection des logiciels contre le piratage informatique. Cela peut expliquer, à la même époque, le regain d'intérêt des éditeurs pour les politiques anti-piratage. En effet, l'année 1999 fut celle de la création du consortium TCPA dirigé par les plus grands éditeurs de logiciels et fabricants de PC. Il a pour but officiel l'élimination de tout piratage informatique.

REFERENCES :

- HOTELLING, H. 1929, Stability in competition, *Economic Journal*, Vol 39, p 41-57
- HURTER, A., et P. LEDERER, 1985, Spatial duopoly with discriminatory pricing, *Regional Science and Urban Economics*, Vol 15, p 541-53.
- PHILPS, L. 1983, The economics of price discrimination, *Cambridge University Press*.
- SHY, O. et J. THISSE, 1999, A Strategic Approach to Software Protection *Journal of Economics and Management Strategy*, Vol 8, 2, p 163-190
- THISSE, J., et X. VIVES, 1988, On The Strategic Choice of Spatial Price Policy, *American Economic Review*, Vol 78, p 122-137.
- THISSE, J., et X. VIVES, 1992, Basing point pricing: Competition versus collusion, *The journal of industrial economics*, Vol XL, p 249-260.

ANNEXE : Les profits et surplus d'équilibre :- $p_A^{\overline{PP-FF}} = p_B^{\overline{PP-FF}} = \frac{1-2m}{2(1-m)}$

$$\begin{aligned}
 & p_A^{\overline{PP-DD}} = \int_0^{\hat{x}^*} p_A^{LD*} - CmT_A dx = \int_0^{\hat{x}^*} p_A^{LD*} - (x - \mu n_A^*) dx = \frac{1}{4} \\
 & p_B^{\overline{PP-DD}} = \int_{\hat{x}^*}^1 p_B^{LD*} - CmT_B dx = \int_{\hat{x}^*}^1 p_B^{LD*} - (1-x - \mu n_B^*) dx = \frac{1}{4} \\
 & p_A^{\overline{PP-FD}} = p_A^{N*} \cdot \hat{x}^* = \frac{2m-1}{8(m-1)} \text{ et } p_B^{\overline{PP-FD}} = \int_{\hat{x}^*}^1 p_B^{LD*} - CmT_B dx = \int_{\hat{x}^*}^1 p_B^{LD*} - (1-x) - \mu n_B^* dx = \frac{9}{16} \\
 & S_{DD}^{PP}(\hat{y}, A) = \mu n_A - \int_0^{\hat{y}} p_A^{LD} dy = \mu n_A - \hat{y}(1 - \mu n_B) + \frac{\hat{y}^2}{2} \text{ et } S_{DD}^{PP}(\hat{y}, B) = \mu n_B - \int_{\hat{y}}^1 p_B^{LD} dy = \mu n_B - \frac{1}{2} + \mu n_A (1 - \hat{y}) + \frac{\hat{y}^2}{2} \\
 & p_A^{PP-FD} = p_A^{N*} (\hat{x}^* + \hat{y}_A^*) = \frac{1-2\mu}{4(\mu-2)(2\mu-3)} \\
 & p_B^{PP-FD} = \int_{\hat{x}^*}^1 p_B^{LD*} - (1-x - \mu n_B^*) dx + \int_{\hat{y}^*}^1 p_B^{LD*} - (1-y - \mu n_B^*) dy = \frac{(4\mu-7)^2}{2(\mu-2)^2(2\mu-3)^2} \\
 & S_{FD}^{PP}(\hat{y}_A, A) = \mu n_A^* - \int_0^{\hat{y}_A^*} p_A^{N*} + y dy = \frac{1+13\mu-27\mu^2+18\mu^3-4\mu^4}{(\mu-2)^2(2\mu-3)^2} \\
 & S_{FD}^{PP}(\hat{y}, B) = \mu n_B^* - \int_{\hat{y}^*}^1 p_B^{L*} dy = \mu n_B^* - \int_{\hat{y}^*}^1 p_A^{N*} + y - \mu n_A^* dy = \mu n_B^* - (1-\hat{y}^*)(p_A^{N*} - \mu n_A^*) - \frac{(1-\hat{y}^*)^2}{2} \\
 & p_A^{\overline{PP-FF}} = p_A^{N*} (\hat{x}^* + \hat{y}_A^*) = \frac{9(2\mu-1)(4\mu-3)}{2(1-\mu)(16\mu-11)^2} \text{ et } p_B^{\overline{PP-FF}} = p_B^{N*} (1-\hat{x}^*) = \frac{(8\mu-7)(16\mu^2-22\mu+7)}{2(1-\mu)(16\mu-11)^2} \\
 & p_A^{\overline{PP-FF}} = p_A^{N*} \hat{x}^* = \frac{(\mu^2-6\mu+3)^2}{9(1-\mu)(\mu^2-4\mu+2)} \text{ et } p_B^{\overline{PP-FF}} = p_B^{N*} (1-\hat{x}^*) = \frac{(2\mu^2-6\mu+3)^2}{9(1-\mu)(\mu^2-4\mu+2)^2} \\
 & p_A^{\overline{PP-DD}} = \int_0^{\hat{x}^*} p_A^{LD*} - (x - \mu n_A^*) dx + \int_0^{\hat{y}^*} p_A^{LD*} - (y - \mu n_A^*) dy = \frac{2}{(\mu-2)^2}, p_B^{\overline{PP-DD}} = \int_{\hat{x}^*}^1 p_B^{LD*} - (1-x - \mu n_B^*) dx = \frac{(\mu-1)^2}{(\mu-2)^2} \\
 & S_{DD}^{\overline{PP}}(y, A) = \mu n_A^* - \int_0^{\hat{y}^*} p_A^{LD*} dy = \frac{-4\mu^2+12\mu-3}{2(\mu-2)^2} \\
 & p_A^{\overline{PP-FD}} = p_A^{N*} (\hat{x}^* + \hat{y}_A^*) = \frac{(2\mu-1)}{8(1-\mu)(4\mu-3)} \text{ et } p_B^{\overline{PP-FD}} = \int_{\hat{x}^*}^1 p_B^{L*} - CmT_B - \mu n_B^* dx = \frac{(8\mu-7)^2}{16(4\mu-3)^2} \\
 & S_{FD}^{\overline{PP}}(y, A) = \mu n_A^* - \int_0^{\hat{y}_A^*} p_A^{N*} + y dy = \frac{-128m^4+296m^3-22m^2+48m+4}{32(m-1)^2(4m-3)^2} \quad S_{FD}^{\overline{PP}}(y, B) = \mu n_B^* - \int_{\hat{y}_B^*}^1 1-y dy = \frac{(7-8\mu)(40\mu^2-63\mu+24)}{32(\mu-1)^2(4\mu-3)^2} \\
 & p_B^{\overline{PP-DF}} = p_B^{N*} (1-\hat{x}) = \frac{(\mu-1)(2\mu-1)}{2(\mu-2)^2} \text{ et } p_A^{\overline{PP-DF}} = \int_0^{\hat{x}} p_A^{LD*} - (x - \mu n_A^*) dx + \int_0^{\hat{y}} p_A^{LD*} - (y - \mu n_A^*) dy = \frac{(2\mu^2-2\mu+13)}{4(\mu-2)^2}
 \end{aligned}$$



$$- S_{DF}^{PF}(y,A) = \mu n_A^* - \int_0^{\hat{y}} (1-y) - \mu n_B^* dy = \frac{48\mu - 13\mu^2 - 12}{8(\mu - 2)^2} \quad \text{et} \quad S_{DF}^{PF}(y,B) = \mu n_B^* - \int_{\hat{y}_B}^1 (1-y) dy = \frac{\mu(8-5\mu)}{8(\mu - 2)^2}$$